**Інструкційна картка**

**проведення практичного заняття №9**

**з дисципліни** ***Вища математика***

**Тема:** **Знаходження частинних похідних та повного диференціала.**

**Мета:** *формувати вміння знаходити частинні похідні функції багатьох змінних*

***Після виконання практичної роботи студент повинен***

**Знати:** *основні правила знаходження частинних похідних першого та другого порядків; повного диференціала.*

**Вміти:** *знаходити частинні похідні та диференціали функцій.*

***Матеріально-технічне оснащення робочого місця***

Інструкційна картка, методичні вказівки, калькулятор.

***Інструктаж з техніки безпеки***

Дотримуватись правил техніки безпеки в навчальній аудиторії.

***Зміст і послідовність виконання завдання***

*1. Знайти частинний приріст функції*  *по змінній х.*

*2. Знайти частинний приріст функції*  *по змінній у.*

*3. Знайти частинні похідні першого порядку.*

*4. Записати та обчислити повний диференціал.*

***Методичні рекомендації з виконання та оформлення***

*Практичну роботу оформити на подвійних листках.*

***Рекомендована література***

*1.* *Васильченко І.П. Вища математика для економістів. Основні розділи: Підручник. Видання друге. – К.: Кондор-Видавництво, 2012., Глава VI § 7 с. 252*

*2. Литвин І.І. Вища математика. Навчальний посібник. - Київ: Центр навчальної літератури, - 2004. – 368с.*

Інструкційна картка складена викладачем \_\_\_\_\_\_\_\_\_ Л.О. Петрівська

Розглянуто та схвалено на засіданні циклової комісії

загальноосвітніх дисциплін

Протокол № \_ від \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ серпня 20\_\_ р.

Голова циклової комісії \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ В. Д. Гуменюк

*Теоретичні відомості*

**1. Основні поняття функції багатьох змінних, границя та неперервність.**

Розглянемо деяку множину  впорядкованих пар чисел . Якщо кожній парі чисел  за певним законом відповідає число , то кажуть, що на множині  визначено функцію  від двох змінних  і  та записують .

Прикладом такої функції може бути площа прямокутника із сторонами  та , що знаходиться за формулою . Тут кожній парі значень  і  відповідає єдине значення площі , тоді функцію двох змінних можна записати формулою .

Змінна  називається залежною змінною (функцією), а змінні  та  - незалежними змінними (аргументами).

За аналогією з функцією однієї змінної  та функцією двох змінних  можна розглядати функцію, яка буде залежати від кількох незалежних змінних . У загальному випадку це можна записати у вигляді:



Тоді незалежні змінні  називають **аргументами**, а залежну змінну  - **функцією**.

***Означення****. Закон, за яким у відповідність значенням аргументів  ставиться деяке значення  називається* ***функцією****.*

***Означення.*** *сукупність значень  для яких вираз має зміст називається* ***областю визначення функції*** *і позначається  або , а значення які при цьому приймає залежна змінна, утворюють* ***область значень функції*** *( або ).*

Лінія, що обмежує область визначення називають її *межею*. Точки області, які не лежать на її межі, називаються внутрішніми. Область, яка містить одні внутрішні точки, називається *відкритою*. Якщо ж до області визначення належать і всі точки межі, то така область називається *замкненою*.

Для функції багатьох змінних справедливо багато понять і тверджень як і для функції однієї змінної. Зокрема, способи задання функції двох змінних.

Найчастіше використовують аналітичний спосіб, коли функція задається формулою. Наприклад, ; . Областю визначення такої функції вважається множина всіх тих точок площини, для яких задана формула має зміст.

Аналогічно до означення границі функції однієї змінної пропонується і означення границі функції двох змінних. Спочатку введемо поняття  - околу заданої точки .

***Означення.*** *Множина всіх точок , координати яких задовольняють нерівність*

*,* (1)

*де  - відстань від точки  до , називається* ***- околом точки ****.*

Іншими словами,  - окіл деякої точки  - це всі внутрішні точки круга з центром ** і радіусом *.*

***Означення (за Коші або „на мові ”).*** *Число А* ***називається границею функції  в точці ****, якщо для будь-якого, як завгодно малого  знайдеться таке число , що для всіх точок  з області визначення  функції, які задовольняють умову , виконується нерівність .*

Використовують позначення:

 або . (2)

Поняття неперервності функції багатьох змінних визначається так само, як і для функції однієї змінної.

Розглянемо функцію двох змінних: . Візьмемо у ній деяку фіксовану точку з координатами  і надамо їй приросту . Тоді приріст функції дорівнює



***Означення.*** *Якщо*

** (3)

*то будемо говорити, що функція  є неперервною в точці .*

Дана формула означає, що нескінченно малим приростам аргументів відповідає нескінченно малий приріст функції. Якщо ввести позначення



то формулу (13.3) можна переписати так:

. (4)

Тобто неперервність функції в даній точці означає, що її границя рівна значенню функції в цій точці.

Якщо функція  є неперервною в кожній точці області визначення, то вона є неперервною у всій області.

Для функції багатьох змінних, коли число аргументів не менше трьох, неперервність функції вводиться за допомогою формул. аналогічних (3) і (4).

Функції двох і більшого числа змінних часто використовуються в економічних дослідженнях: при прогнозування, вивченні попиту та пропозиції, аналізі виробничої діяльності тощо.

**2. Частинні похідні першого порядку. Диференціювання функції багатьох змінних першого порядку.**

Для функції багатьох змінних можна ввести поняття похідної розглядаючи функцію , як функцію від , де - параметр, який фіксується (або функцію від , де - параметр, який фіксується)

***Означення.*** *Величина*

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

*називається*

|  |  |
| --- | --- |
| ***частинним приростом функції  по змінній .*** | ***частинним приростом функції  по змінній .*** |

Розглянемо відношення

.

***Означення.*** *Границю диференціального відношення  при  будемо називати* ***частинною похідною функції  у точці  по *** *і позначатимемо:*

**

Аналогічно вводиться поняття частинної похідної функції двох змінних по  яка позначається одним із символів *.*

Операція знаходження похідної  називається **диференціюванням функції  по аргументу **, а точка  називається **точкою диференціювання.** Частинна похідна

****

обчислюється як звичайна похідна по  припускаючи, що змінна  є сталою. Аналогічно обчислюється частинна похідна по , але сталою є вже . Тобто, частинних похідних є стільки, скільки аргументів містить функція. Щоб підкреслити, що ми диференціюємо функцію перший раз говорять: „знаходимо похідну першого порядку”.

***Завдання.*** Обчислити в точці  частинні похідні першого порядку функції 

Розв’язування:

 

 

**Теорема *(існування частинних похідних диференційовної функції)****. Якщо функція  диференційована в точці , то вона має в цій точці похідні  та  і*

**

Неважко перевірити, що коли функція має частинні похідні в точці, то вона буде неперервна в цій точці. Зворотне твердження не завжди вірне.

**3. Економічний зміст частинних похідних.**

Розглянемо виробничу функцію , що виражає витрати виробництва в залежності від кількості двох видів продукції  та , яка випускається. Нехай чинник  змінився на величину , тоді виробнича функція  зміниться на величину

.

Склавши відношення приросту функції  до приросту аргументу  отримаємо вираз , що виражає середній приріст виробничої функції на одиницю приросту чинника , або середні витрати виробництва на одиницю продукції . Здійснивши перехід до границі при  отримаємо граничні витрати виробництва на одиницю продукції , тобто

.

Провівши аналогічні міркування з чинником , отримаємо: .

**Еластичність виробничої функції ** **відносно чинників виробництва  та  встановлюється так:**

 - приблизно вказує відсотковий приріст виробничої функції (зниження) відносно до приросту чинника  на 1% за умови, що чинник  не змінюється;

 - приблизно вказує відсотковий приріст виробничої функції відносно до приросту чинника  на 1% за умови, що чинник  не змінюється.

**Завдання.** Для випуску деякого товару визначена виробнича функція  де  - чинники виробництва. Дослідити:

1. закон зміни виробничої функції за кожним чинником;
2. еластичність функції за кожним чинником;
3. коефіцієнт еластичності за чинниками при .

*Розв’язання*

1. Щоб визначити зміну виробничої функції за чинниками  та , треба знайти частинні похідні  та :

; 

1. Використаємо означення еластичності функції за даними чинниками:

; ,

де .

3) Обчислимо коефіцієнти еластичності при .

;



Тобто, із зростанням чинника  на 1% відбувається відносне зростання заданої виробничої функції приблизно на 0,89% (за умови стабільності чинника ), а при зростанні чинника  на 1% виробнича функція зростає приблизно на 0,26% (за умови стабільності чинника ).

Отже, на виробничу функцію  найбільший вплив має чинник .

***Зауваження*.** Від’ємне значення коефіцієнту еластичності показує зменшення виробничої функції при зростанні відповідного чинника.

*Наприклад*, якщо  - функція випуску продукції і , то зростання чинника  на 1% призводить до зниження випуску продукції на 0,08%.

Якщо  і  розглядати як диференціали незалежних змінних, то  можемо записати у ***формі „повного диференціала”:***

 (1)

Якщо це співвідношення виконується, то говорять, що функція диференційована в точці .

Формула (1) показує, що для функції багатьох змінних поняття „функція диференційована” і „має частинні похідні першого порядку в цій точці”, власне кажучи, не є тотожними. Функція може мати частинні похідні в точці, одна з яких не є неперервною. Тоді для такої функції в цій точці рівність (13.6) не виконується.

Отже, для диференційованості функції багатьох змінних необхідно, щоб усі частинні похідні першого порядку були неперервними.

Нехай у функції   функції змінної . Тоді  є складною функцією. Поставимо питання про існування похідної  припустивши, що похідні по  і по  існують і неперервні. Зафіксуємо точку  і надамо їй приросту , тоді незалежні змінні  одержать прирости  і матиме місце формула:

.

Перейшовши до границі при  одержимо, що

.

Звідки

 (2)

***Означення. Градієнтом*** *функції  у точці М називається вектор, що має координати* .

Тоді .

Градієнт показує напрямок, уздовж якого значення функції зростає найбільше у даній точці.

**Завдання.** Обчислити градієнт функції  в точці *А*.

*Розв’язання*

; .

; 

**Відповідь:** .